تمرین سری سوم درس آنالیز تابعی مقدماتی

۱. اگر $T : \ell^2 \to \ell^2$ بدین صورت تعریف شود که $Tx = y$ برای $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ و $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ که

$$y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ni} x_i$$

اگر $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_{ij}\right|^2 < \infty$ ، نشان دهید که T فشرده است.

۲. فرض کنید $T \in B(H)$ که H یک فضای هیلبرت است، نشان دهید اگر $rank(T) < \infty$ آنگاه $\sigma(T)$ یک مجموعه متناهی است.

۳. اگر $T \in B(H)$ یک عملگر مثبت و فشرده باشد، نشان دهید ریشه مثبت آن نیز فشرده است.

۴. $T \in B(H)$ فشرده است اگر و تنها اگر T^*T فشرده باشد.

۵. فرض کنید H فضای هیلبرت با بعد نامتناهی باشد و $\{e_n\}$ و $\{f_n\}$ دنباله‌های اورتونرمال درآن باشند. $\{\alpha_n\}$ را دنباله‌ای در $\mathbb{C}$ بگیرید و عملگر خطی $T : H \to H$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) f_n$$

نشان دهید:

الف) T کراندار است اگر و تنها اگر دنباله $\{\alpha_n\}$ کراندار باشد.

ب) T فشرده است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

۶. اگر H فضای هیلبرت با بعد نامتناهی باشد و $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد که به صفر همگرا است، نشان دهید یک عملگر خودالحاق و فشرده روی H وجود دارد که مجموعه مقادیر ویژه ناصفر آن دنباله $\{\lambda_n\}$ است.